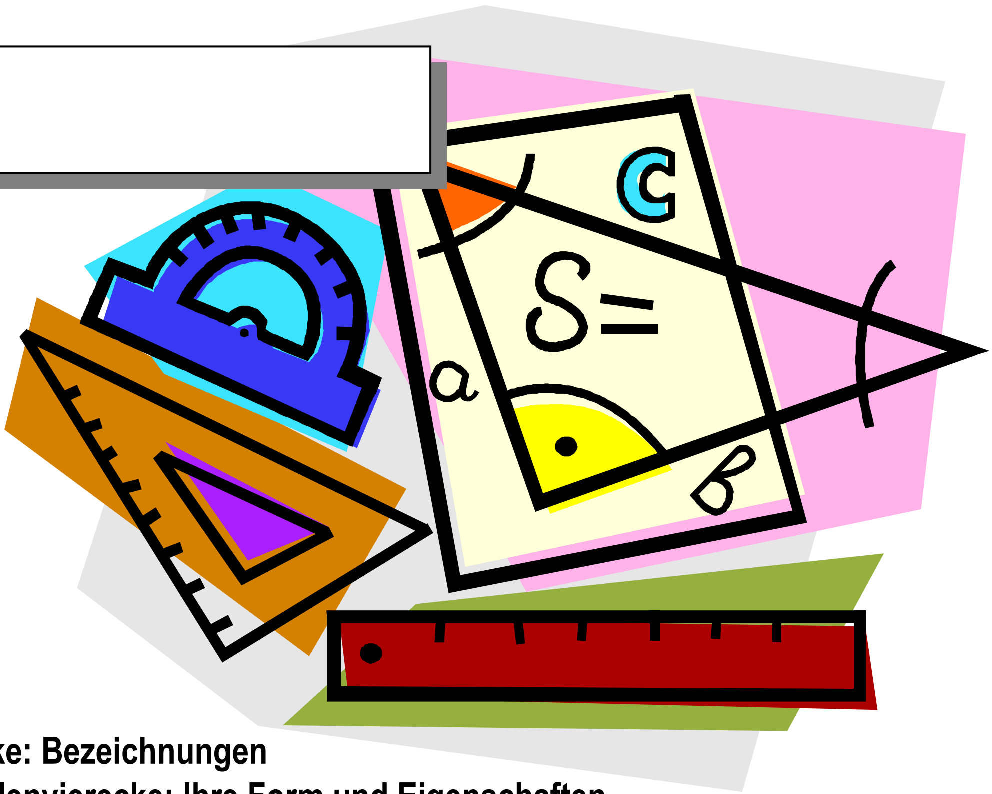
Geometrie-Dossier
Vierecke

Name:

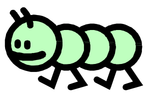


Inhalt:

- **Vierecke: Bezeichnungen**
- **Parallelenvierecke: Ihre Form und Eigenschaften**
- **Konstruktion von Parallelenvierecken**
- **Winkelsumme in Vielecken, Flächenberechnung in Vielecken**
- **Berechnungen im Trapez**
- **Konstruktion von Trapezen**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

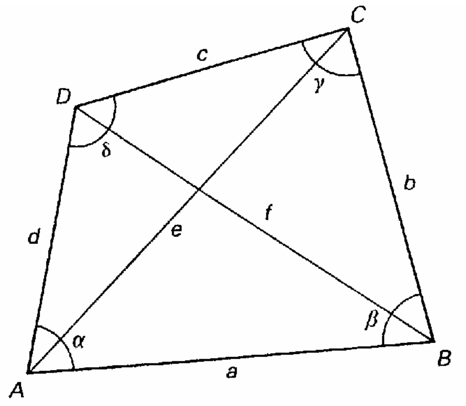
schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Farbcode:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*

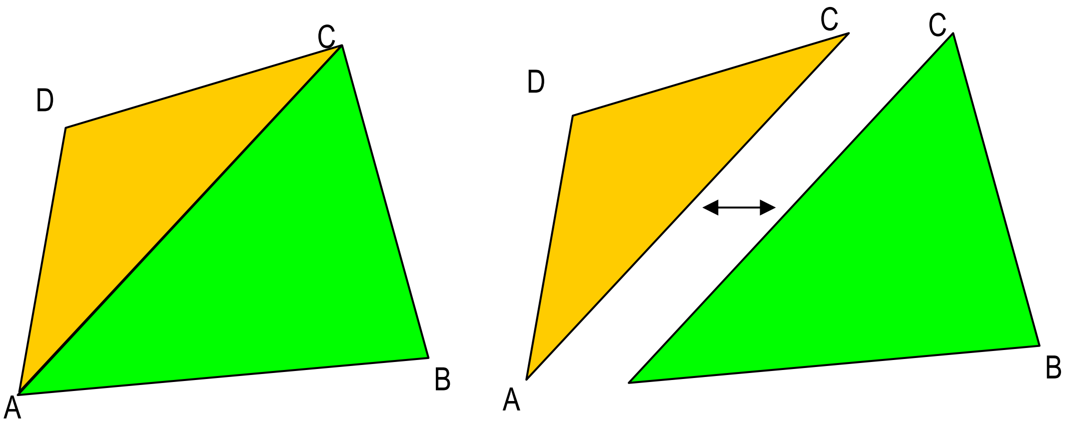
1. Allgemeine Vierecke



Das Viereck ist eine (ebene) Figur mit

4 Ecken:	*A, B, C, D*
4 Seiten:	*AB, BC, CD, AD*
4 Winkeln:	$\alpha = \measuredangle DAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCD$, $\delta = \measuredangle CDA$
2 Diagonalen:	*AC, BD*

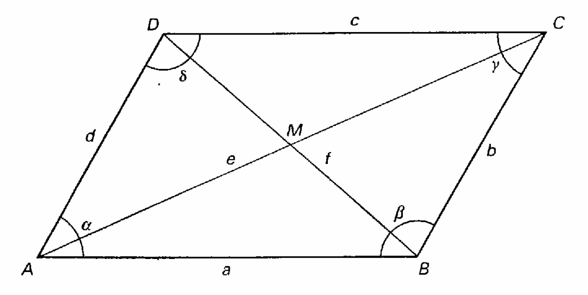
Eigenschaften: Winkelsumme = 360°
(denn jedes Viereck kann in zwei Teildreiecke zerlegt werden, hier z.B. ABC und ACD)



➔ Prinzipiell kann jede beliebige Figur (also ein n-Eck oder Vieleck) in Dreiecke zerlegt werden.

2. Parallelenvierecke

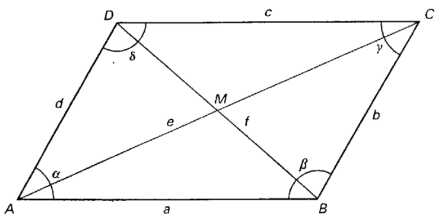
2.1 Definition von Parallelenvierecken



- sind punktsymmetrisch am Diagonalenschnittpunkt
- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang (AB = CD, BC = AD)
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich gross ($\alpha=\chi;\beta = \delta$)
- Benachbarte Winkel ergänzen sich auf 180° ($\alpha+\beta=\beta+\chi=\chi+\delta=\delta+\alpha$ = 180°)
- Die Diagonalen halbieren sich in M

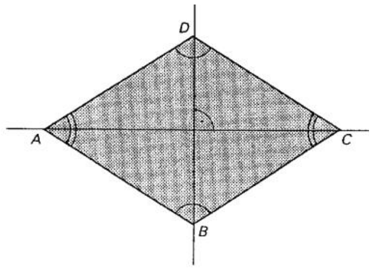
Die Eigenschaften der verschiedenen Parallelenvierecke.

Die nachfolgende Tabelle zeigt neben dem Aussehen und dem Namen des entsprechenden Parallelenviereckes die speziellen Eigenschaften jeder einzelnen Figur. Diese Liste ist enorm wichtig, will man Parallelenvierecke konstruieren. Denn durch die Kenntnis der einzelnen Eigenschaften ergeben sich viele Konstruktionswege.



Rhomboid (Parallelogramm)

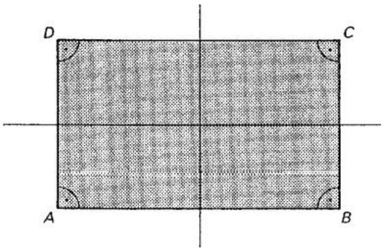
- „Das normale Parallelenviereck“ (Eigenschaften siehe oben)



Rhombus (Raute)

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

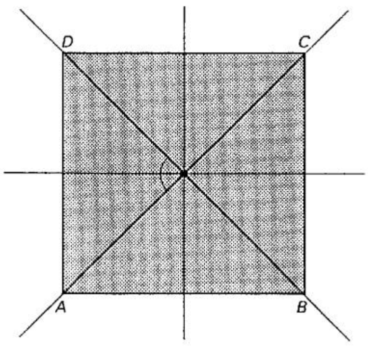
- alle Seiten sind gleich lang
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Rhombus-Winkel
- Hat 2 Symmetrieachsen (Diagonalen)



Rechteck

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

- Alle Winkel sind 90°
- Die Diagonalen sind gleich lang
- 2 Symmetrieachsen (Mittelparallelen)



Quadrat

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

- Alle Seiten sind gleich lang
- Alle Winkel sind 90°
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel
- 4 Symmetrieachsen (Diagonalen und Mittelparallelen)
- Jedes Quadrat ist sowohl ein Rhombus als auch ein Rechteck *(da es über alle entsprechenden Eigenschaften verfügt.)*

Konstruktion von Parallelenvierecken:

Skizze: Für jede Konstruktion braucht es anfänglich eine Skizze. Diese **beginnt in jedem Fall mit der Lösung** (also die Figur, die man konstruieren soll). Die Skizze ist nicht massstabgetreu, sie muss aber die richtige Form aufweisen. (Wenn ein Rhombus konstruiert werden soll, muss die Skizze auch ein Rhombus darstellen, sonst macht es keinen Sinn). **In der Skizze werden alle gegebenen Dinge (Punkte, Geraden, Winkel) mit GRÜN markiert.**

Konstruktionsplan / Konstruktionsbericht (oder einfach: Lösungsweg):

Um den Lösungsweg zu finden, wird die Skizze bearbeitet. Man kann dort zusätzliche Informationen einzeichnen, kann die Lösung so entwickeln. Die gefundenen Schritte werden nun der Reihe nach aufgeschrieben. So wird der Lösungsweg Schritt für Schritt aufgeschrieben. Wenn möglich verwenden wir im Konstruktionsbericht geometrische Abkürzungen und Symbole.

Aufgabenlösung:

Nachdem der Lösungsweg steht, muss nur noch gezeichnet werden. Dies ist reines Handwerk, bedarf aber einer genauen, sauberen und sorgfältigen Arbeitsweise.

Aufgaben Konstruktion von Parallelenvierecken:

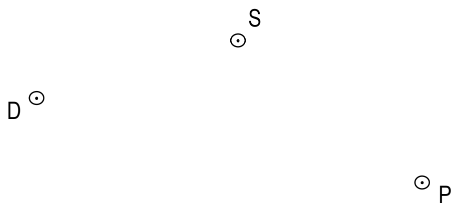
1. Konstruiere das gesuchte Parallelenviereck ABCD. (S ist jeweils Diagonalenschnittpunkt)

a) Rechteck mit P ∈ AB

Skizze:

KB:

Konstruktion:

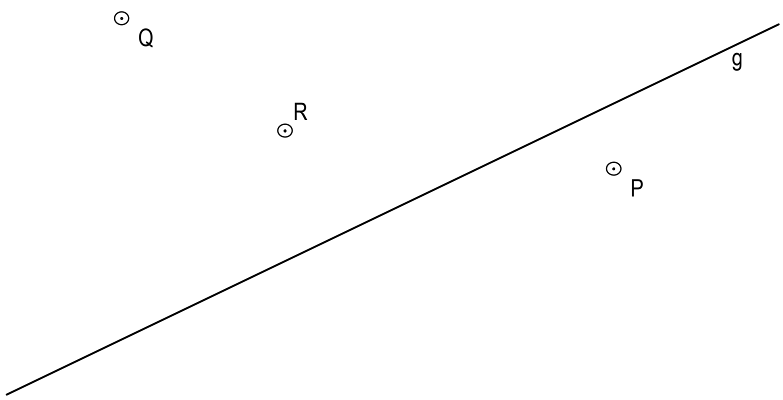


b) Rhombus mit AC ⊆ g, P ∈ BC, Q ∈ CD, R ∈ BD *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

Skizze:

KB:

Konstruktion:

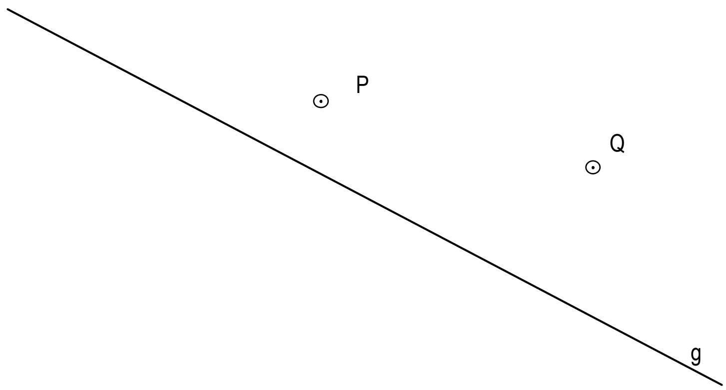


c) Quadrat mit P ∈ AD, Q ∈ CD und AC ⊆ g *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

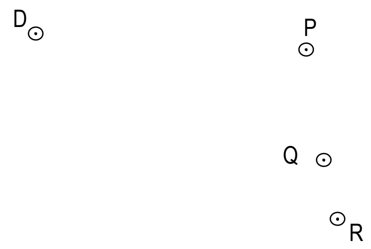
Skizze:

KB:

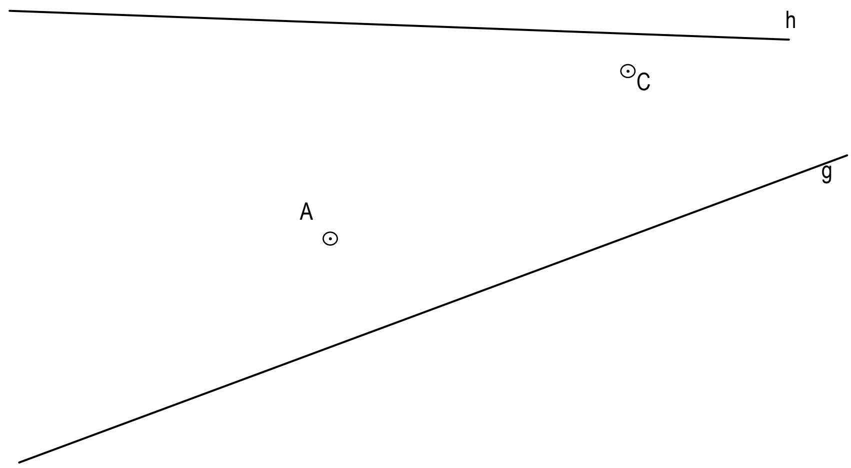
Konstruktion:



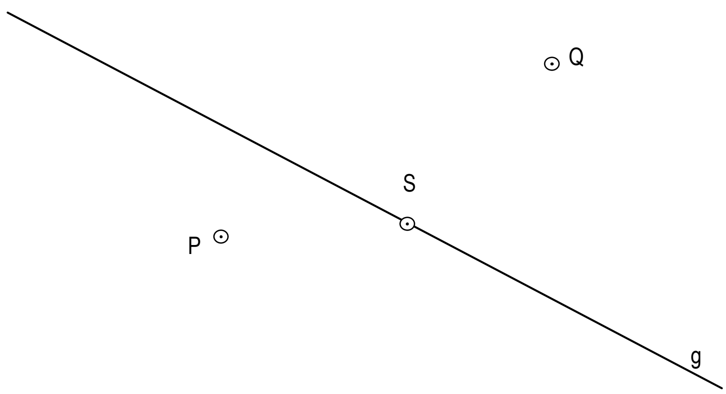
d) Rhombus mit P ∈ CD, Q ∈ AC, R ∈ BD

Skizze:	*Konstruktion:*
KB:	

e) Ein Rhomboid mit der Ecke B auf g und der Ecke D auf h.

Skizze:	*Konstruktion:*
KB:	

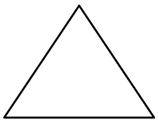
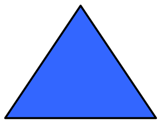
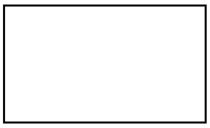
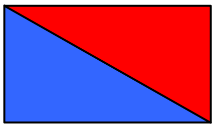
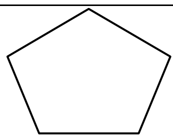
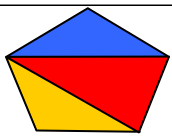
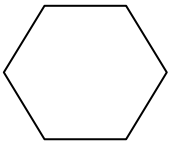
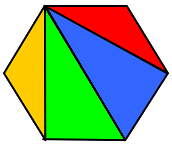
f) Rhombus mit P ∈ AD, Q ∈ CD und BD ⊆ g *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

Skizze:	*Konstruktion:*
KB:	

3. Winkelberechnung in Vielecken (oder eben n-Ecken)

Wie oben festgestellt, können alle n-Ecke in Dreiecke aufgeteilt werden (Das „n“ beim n-Eck steht für eine natürliche Zahl, die sinnvollerweise grösser als 2 ist. → für n=3 entsteht also ein 3-Eck, für n=4 ein 4-Eck usw.)

<u>Verschiedene n-Ecke im Test:</u>

n	*Form*	*Anzahl Teildreiecke*	*Winkelsummenberechnung*
3		1 	1 Dreieck mit 180° ➔ 1 • 180° = **180°**
4		2 	2 Dreieck e mit je 180° ➔ 2 • 180° = **360°**
5		3 	3 Dreiecke mit 180° ➔ 3 • 180° = **540°**
6		4 	4 Dreiecke mit 180° ➔ 4 • 180° = **720°**

Es fällt also auf, dass immer n-2 Teildreiecke in ein n-Eck hineingestellt werden können. Somit gilt für die Berechnung der Winkelsumme ein einem allgemeinen n-Eck:

(Innen-) Winkelsumme im n-Eck = (n-2) • 180°

Nun kommen oft auch sogenannte regelmässige n-Ecke vor. *Diese haben die Eigenschaft, dass alle Innenwinkel und alle Seiten gleich sind.*

Im regelmässigen n-Eck lassen sich dank der Winkelsumme auch noch die einzelnen Innenwinkel berechnen: So ist im regelmässigen Viereck (also einem Quadrat) die Winkelsumme = 360° und somit ist ein einzelner Winkel = 360:4 = 90° (Das stimmt mit der uns bekannten Eigenschaft des Quadrates überein.) Entsprechend geht diese Überlegung für jedes andere regelmässige n-Eck:

Regelmässiges Dreieck (= Gleichseitiges Dreieck):	Winkelsumme = 180°	➔ Ein Winkel = 180° : 3 = **60°.**
Regelmässiges Achteck	Winkelsumme = 1080°	➔ Ein Winkel = 1080° : 8 = **135°.**
Regelmässiges Zehneck	Winkelsumme = 1440°	➔ Ein Winkel = 1440° : 10 = **144°.**

Aufgaben Winkelberechnung:

1. Berechne die Winkelsumme in einem

a) 8-Eck

b) 13-Eck

c) 45-Eck

2. Berechne die Grösse eines Winkels im

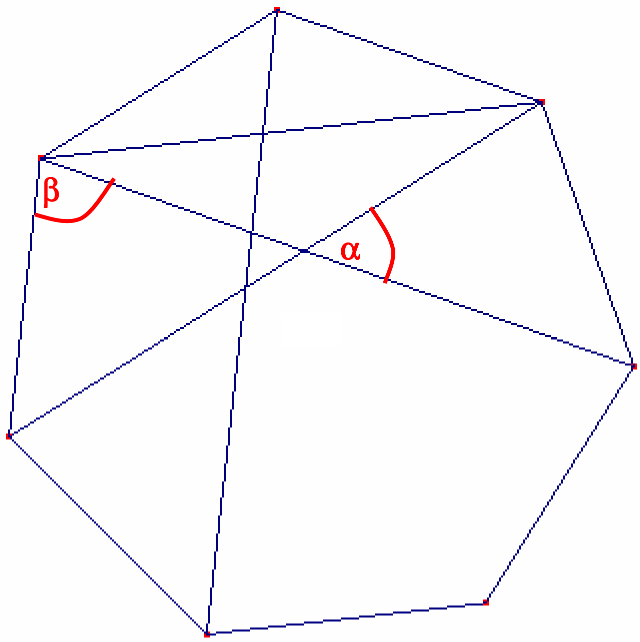
a) regelmässigen Sechseck

b) regelmässigen Fünfeck

c) regelmässigen Dreizehneck

3. Bestimme die Grösse der Winkel α und β

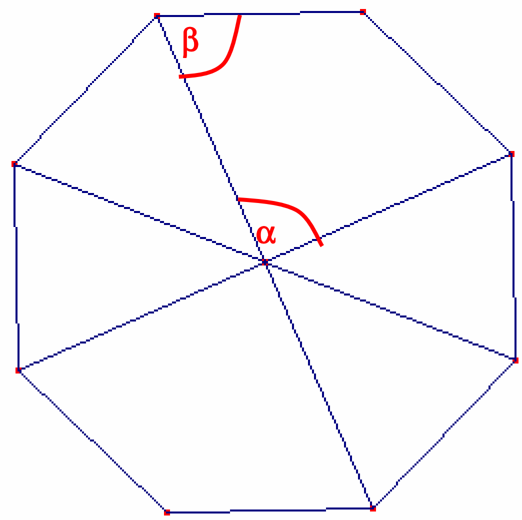
a)



α = ...

β = ...

b)

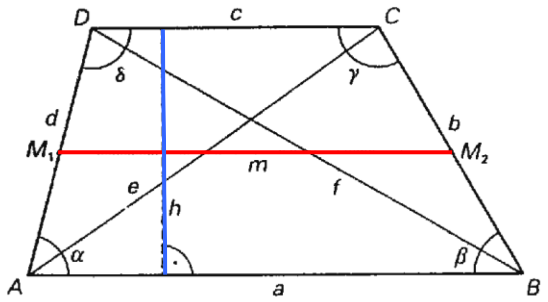


α = ...

β = ...

4. Das Trapez

Unter den Vierecken gibt es – neben den Parallelenvierecken eine weitere Form, die über spezielle Eigenschaften verfügt. Es handelt sich dabei um das Trapez, welches “nur“ noch zwei parallele Seiten aufweist (Das Parallelenviereck hatte noch JE ZWEI parallele Seiten)



Das Trapez hat *mindestens zwei* parallele Seiten

AB = a :	Grundseite	
CD =c:	Deckseite	a // c !
BD = b, DA = d:	Schrägseiten	
h:	Höhe	
m:	Mittellinie (Mittelparallele a,c)	
M_1, M_2:	Mittelpunkt der Schrägseiten (diese werden durch die Mittellinie m halbiert!)	

Die Mittellinie im Trapez

Die Mittellinie m im Trapez hat eine wichtige Bedeutung für die Konstruktion und die Berechnung. Für Konstruktionen wichtig ist die Eigenschaft, dass die Mittellinie Mittelparallele der Grund- und Deckseite ist, für die Berechnung ist sie wichtig, da nur über die Mittellinie die Trapezfläche bestimmt werden kann.

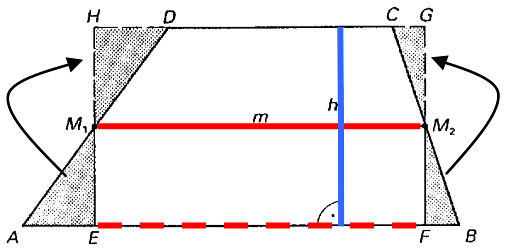
Berechnung von m:

$$\mathbf{m = \frac{Grundseite+Deckseite}{2} = \frac{a+c}{2} = (a+c) : 2}$$

Abgeleitete Formeln:
a = 2m – c
c = 2m – a

Die Mittellinie entspricht also dem arithmetischen Mittel von Grund- und Deckseite.

Der Flächeninhalt eines Trapezes:



Wird das Trapez wie unten angegeben aufgeteilt, können die im unteren Teil abgeschnittenen Dreiecke punktsymmetrisch am Schrägseitenmittelpunkt (M1, M2) nach oben verschoben werden. Somit lässt sich das Trapez in ein Rechteck verwandeln.

Es gilt: Trapez ABCD und Rechteck EFGH sind flächengleich

Die Rechtecksfläche lässt sich jetzt berechnen: A = m • h (Rechtecksfläche = Grundseite mal Höhe)
Somit muss die Trapezfläche ebenfalls gleich sein, also ebenfalls A = m • h (Trapezfläche = Mittellinie mal Höhe)

Berechnung der Trapezfläche:

$$\mathbf{A_{Tr} = Mittellinie \bullet Höhe = m \bullet h}$$

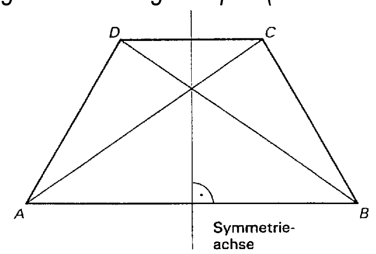
Gemäss Berechnung von m

$$\mathbf{A_{Tr} = [(a+c) : 2] \bullet h = \frac{a+c}{2} \bullet h}$$

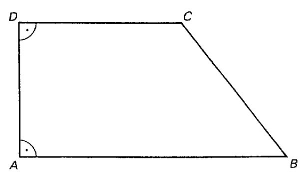
Abgeleitete Formeln:
m = A : h
h = A : m

Spezielle Trapeze:

Das gleichschenklige Trapez ($\overline{BC} = \overline{AD}$ (Schenkel))



Das rechtwinklige Trapez



Aufgaben Berechnung im Trapez:

1. Berechne die fehlenden Grössen im Trapez:

	AB = a	CD = c	m	h	A
a)	15 cm	6 cm		9 cm	
b)	14 cm		18.5 cm		240.5 cm^2
c)		9cm		15 cm	513.75 cm^2
d)	24,5 cm			32 cm	1088 cm^2

2. Berechne die gesuchten Grössen im Trapez:

a)	Gegeben:	Gesucht:	Skizze:	Berechnungen
	a = 12 cm c= 8 cm Winkel BAD = 45° Winkel BDC = 45°	h= m = A=		
b)	**Gegeben:**	**Gesucht:**	**Skizze:**	**Berechnungen**
	d = 8 cm a = 8 cm Winkel BAD = 90° A = 214 cm^2	h= m= c =		

Aufgaben Trapez-Konstruktionen

3. Konstruiere das Trapez ABCD aus den folgenden Angaben:

a)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	a = 6.5 cm c= 4 cm Winkel BAD = 70° Winkel (AD, BC)=90°		
	Konstruktion:		

b)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	c = 6cm d = 4 cm m= 7cm Winkel DAB = 70°		
	Konstruktion:		

c)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	c = 6cm d = 4 cm a = 9cm α = 65°		
	Konstruktion:		

d)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	$\alpha = 65°$ $\beta = 50°$ a = 9 cm c = 4 cm		

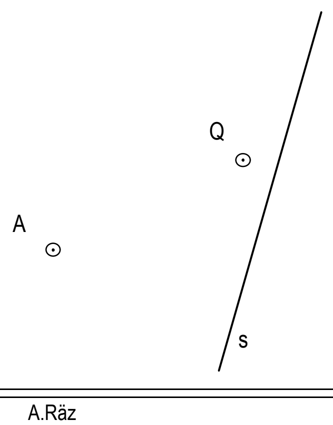
Konstruktion:

e)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	$\alpha = 65°$ Winkel BCD = 120° a = 7.5 cm b = 4.5 cm		

Konstruktion:

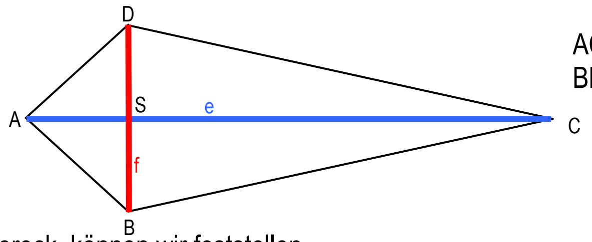
f) Konstruiere das gleichschenklige Trapez mit s = Symmetrieachse, Q = Schnittpunkt von m und BD.

Skizze:



5. Drachenviereck

Das Drachenviereck hat ebenfalls einige Spezialitäten, auf die hier nur kurz eingegangen werden soll:

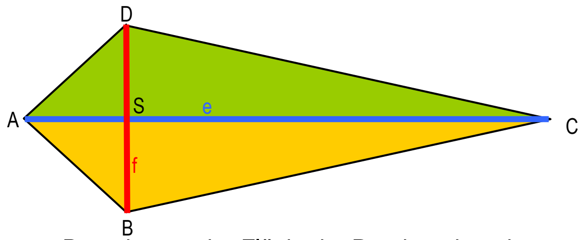


AC = e
BD = f

Betrachten wir das Drachenviereck, können wir feststellen

- dass die **Diagonale AC gleichzeitig Symmetrieachse ist.**
- **Die Diagonalen schneiden sich in S in einem rechten Winkel**

Das Drachenviereck lässt sich also für Berechnungen relativ einfach benutzen: So besteht es aus zwei gleichgrossen, kongruenten Dreiecken:



Die Fläche eines einzelnen Dreiecks beträgt demnach
e • (f : 2) : 2 (➔ Grundseite mal Höhe durch 2)

Beide Dreiecke zusammen sind somit: e • (f : 2) : 2 • 2 = e • (f : 2)

Berechnung der Fläche im Drachenviereck:

A_{DV} = Diagnonale 1 • Diagonale 2 : 2 = e • f : 2 = $\frac{e \bullet f}{2}$

Abgeleitete Formeln:
e = A • 2 : f
f = A • 2 : e

Aufgaben Drachenviereck

1. Berechne im Drachenviereck:

	Gegeben:	Gesucht:	Skizze:	Berechnungen
a)	AC = 12 cm BD= 8 cm	A		
b)	AC = 12 cm A = 156 cm^2	BD		

2. Konstruiere das Drachenviereck ABCD aus s = Symmetrieachse, AC $\subseteq$ s, P $\in$ AB, Q $\in$ AD, R $\in$ BC, T $\in$ CD

	Skizze:	Konstruktion
a)