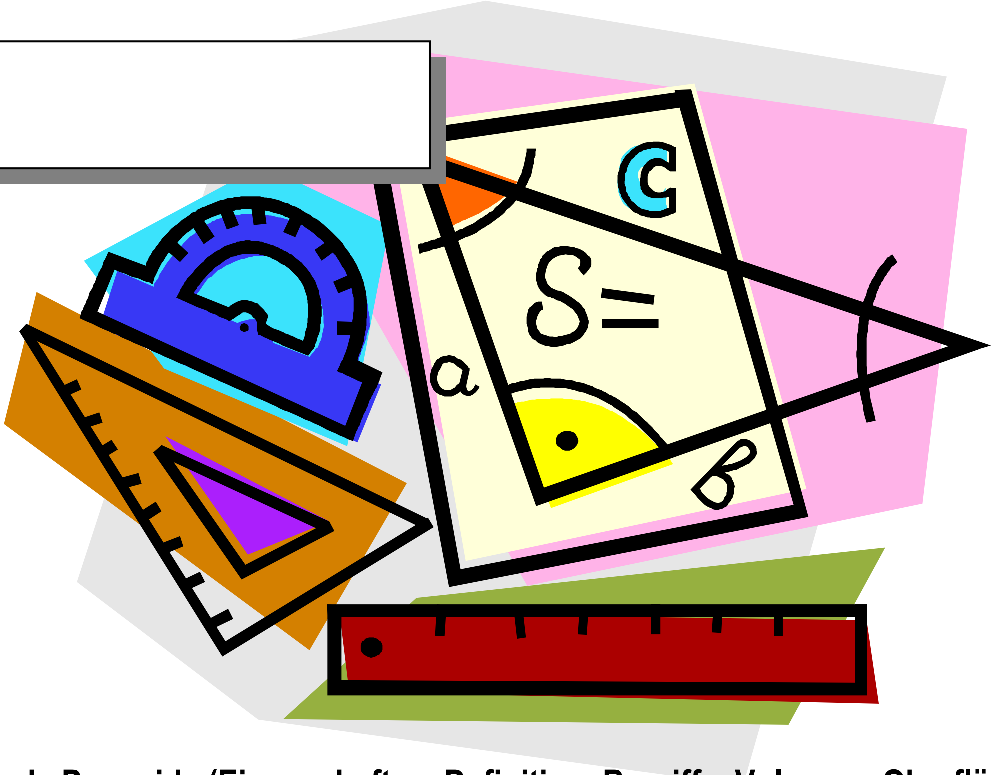
Geometrie-Dossier
Pyramiden und Kegel

Name:



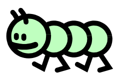
Inhalt:

- **Die gerade Pyramide (Eigenschaften, Definition, Begriffe, Volumen, Oberfläche)**
- **Aufgaben zur Berechnung und Konstruktion von geraden Pyramiden.**
- **Der gerade Kreiskegel (Eigenschaften, Definitionen, Begriffe, Volumen, Oberfläche)**
- **Aufgaben zur Berechnung und Konstruktion von geraden Kreiskegeln.**

Eine Version zum Download findest du im Internet unter www.andiraez.ch/schule

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Die gerade Pyramide

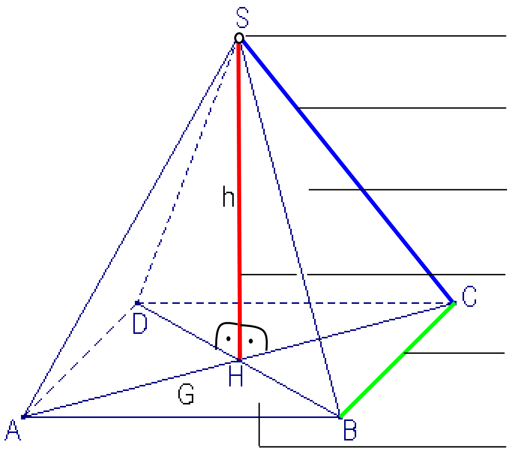
1.1 Definition

Mit dem Begriff „Pyramide“ bringen wir sofort die Pyramiden von Giseh (bei Kairo, Ägypten) als eines der sieben Weltwunder der Antike in Verbindung. Die Form der Pyramiden ist dabei typisch: Eine eckige Grundfläche und Seitenkanten, die auf eine Spitze zulaufen. Unter diesen Pyramiden gibt es die „geraden Pyramiden“, n genannt.

Als Definition gilt:

Als gerade Pyramide kommen nur Körper in Frage, deren Grundfläche einen eindeutigen Mittelpunkt (bei Dreiecken: Schwerpunkt) haben. Die <u>Pyramidenspitze steht dabei immer senkrecht über diesem Mittelpunkt</u>. Bei geraden Pyramiden sind zudem alle Seitenkanten gleich lang.

1.2 Bezeichnungen bei der geraden Pyramide



Spitze S

Seitenkante k

Seitenfläche *(Alle Seitenflächen zusammen bilden den Mantel M)*

Pyramidenhöhe h (kurz: Höhe): <u>Die Höhe steht senkrecht auf G</u>

Grundkante

Grundfläche G *(Mantel und Grundfläche bilden die Oberfläche S)*

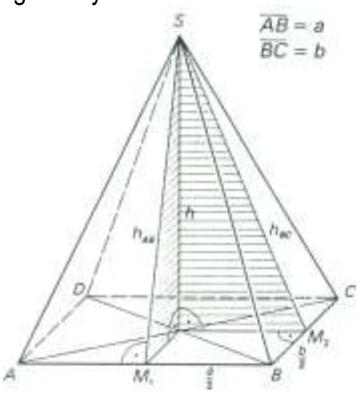
1.3 Eigenschaften der geraden Pyramide

Wie oben angetönt hat die gerade Pyramide einige speziellen Eigenschaften:

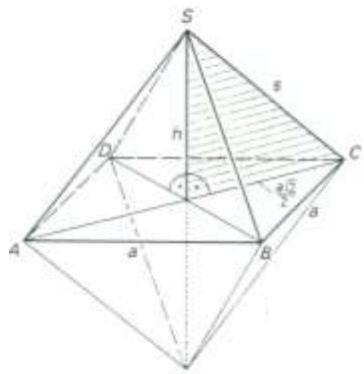
- Die Grundfläche ist ein Dreieck, ein Viereck oder ein regelmässiges n-Eck
- Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche
- Die Seitenflächen sind ausschliesslich Dreiecke. Zusammen bilden sie den Mantel der Pyramide
- Alle Seitenkanten laufen in der Spitze zusammen und sind gleich lang.

1.4 Spezielle Pyramiden

In der untenstehenden Übersicht finden sich mehrere gerade Pyramiden. Die Form ihrer Grundfläche führt zur Bezeichnung der Pyramide.

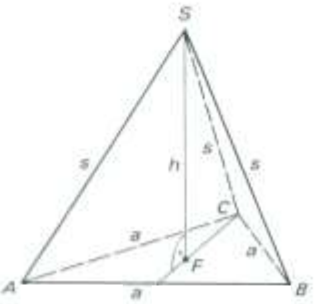


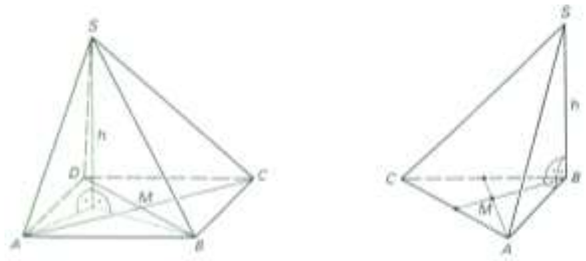
Gerade, vierseitige Pyramide
(nicht regelmässig, weil die Grundfläche ein Rechteck ist, also nicht gleich lange Seiten hat)



Regelmässige vierseitige Pyramide
(auch <u>quadratische Pyramide</u> genannt).

Falls a = s können zwei solche Pyramiden zusammengesetzt werden (Es entsteht ein Körper mit acht kongruenten Flächen ➔ ***Oktaeder*** *(Achtflächner))*





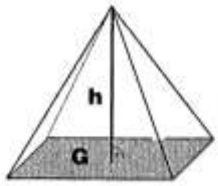
Regelmässige dreiseitige Pyramide
Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck

*(Falls s = a besteht die Pyramide aus vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken und heisst **Tetraeder** oder Vierflächner)*

Schiefe Pyramiden
(dies sind also keine geraden Pyramiden, weil die Spitze nicht senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundseite liegt.)

1.5 Das Volumen der geraden Pyramide

Das Volumen einer Pyramide kann durch verschiedene Methoden bestimmt werden:

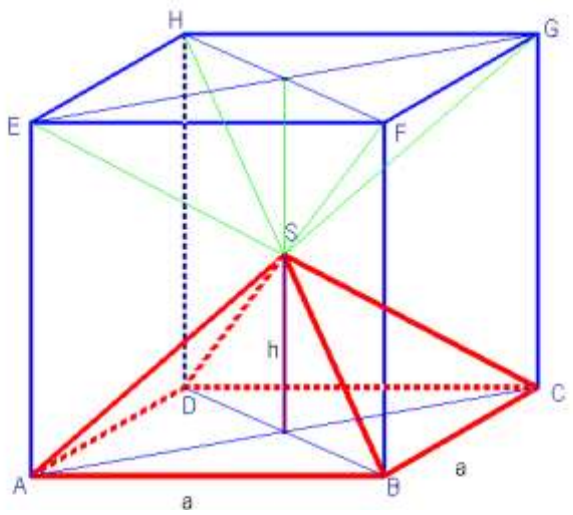


$$V_{Pyramide} = \frac{G \cdot h}{3}$$

- Messen des verdrängten Wassers (Überlaufverfahren)
- Wasser in Pyramide einfüllen
- Durch Zerlegung eines Würfels
- Durch Zerlegung eines Würfels in schiefe Pyramiden

Hier wollen wird die oben festgehaltene Formel zur Berechnung des Volumens der Pyramide mittels Würfelzerlegung nachweisen:

Durch die eingezeichnete Zerlegung können wir aus einem Würfel genau 6 gleichgrosse quadratische Pyramiden erzeugen. Alle sechs entsprechen der rot und dick eingezeichneten Pyramide ABCDS.



Die Grundfläche des Würfels ist dabei auch die Grundfläche der Pyramide, also $G_{Würfel} = G_{Pyramide} = a^2$

Die Höhe der Pyramide ist genau die Hälfte der Würfelhöhe, also $h_{Pyramide} = \frac{a}{2}$

Und so gilt:

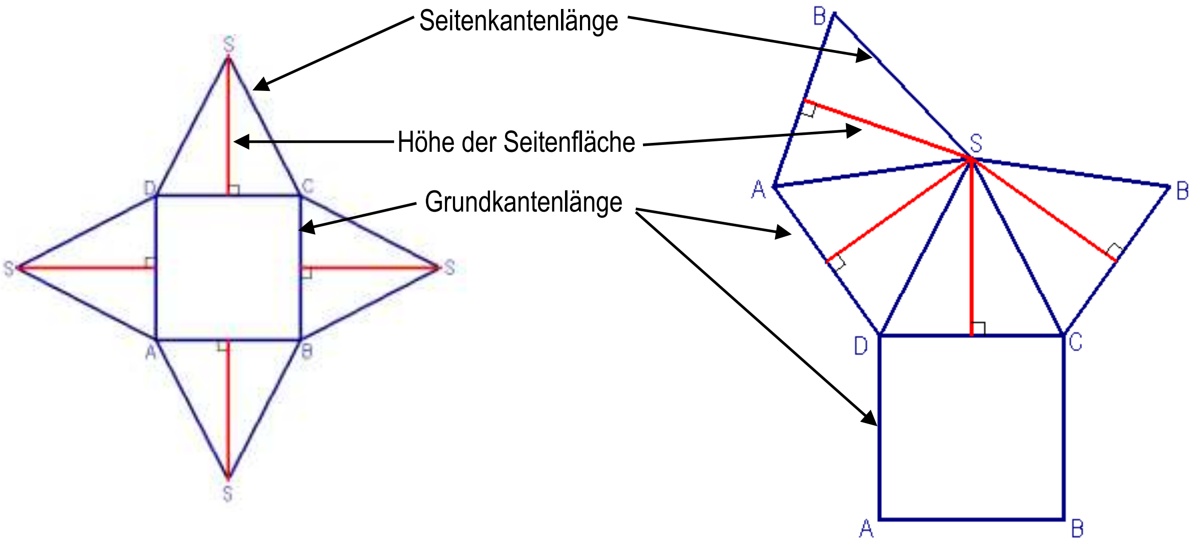
$$\mathbf{V_{Pyramide}} = \frac{V_{Würfel}}{6} = \frac{a^3}{6} = \overbrace{a^2 \bullet}^{a^2 = G} \frac{a}{6} = G \bullet \frac{h}{3} = \frac{\mathbf{G \bullet h}}{\mathbf{3}}$$

$\frac{a}{2} = h$, also ist $\frac{a}{6} = \frac{h}{3}$

q.e.d.

1.6 Das Netz einer geraden Pyramide

Bevor wir die Oberfläche bestimmen, zeichnen wir einmal ein Netz einer quadratischen Pyramide.



Damit wir das Netz einer Pyramide zeichnen können, brauchen wir neben der **Grundkantenlänge** (oder der Grundkantenlängen bei einer nicht quadratischen Grundfläche) **entweder die Länge der Seitenkante oder die Höhe der Seitenfläche**. **Bei geraden Pyramiden sind die Seitenflächen immer gleichschenklige Dreiecke**, lassen sich also relativ einfach zeichnen.

Für Berechnungen und Konstruktionen braucht man häufig die Pyramidenhöhe.
Pyramidenhöhe und Seitenflächenhöhe (zusammen mit Teilstrecken der Grundfläche) können mit Pythagoras berechnet werden. Zur Konstruktion der Pyramidenhöhe aus einem Pyramidennetz ist ebenfalls ein solches rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren. *(Bei Unklarheit kannst du in der Lösung der ersten Übungsaufgabe nachschlagen)*

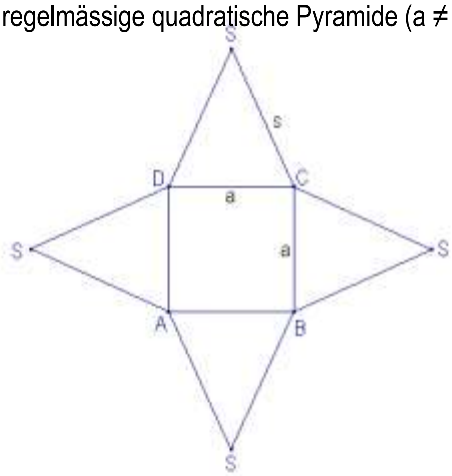
1.7 Die Oberfläche einer geraden Pyramide

Die Oberfläche der Pyramide besteht – wie beim Netz ersichtlich – aus zwei Bestandteilen: Der Grundfläche und der Mantelfläche. Also heisst die Formel für die Oberflächenberechnung bei allen Pyramiden (auch bei schiefen Pyramiden) gleich:

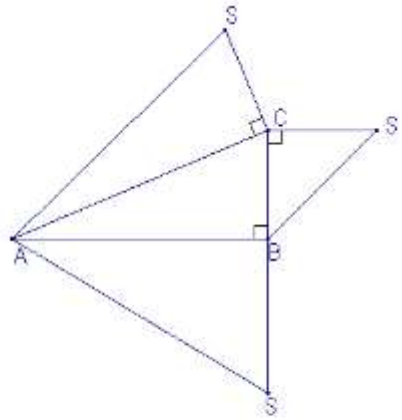
Oberfläche = Grundfläche + Mantel oder **S = G + M**

Aufgaben "Die gerade Pyramide":

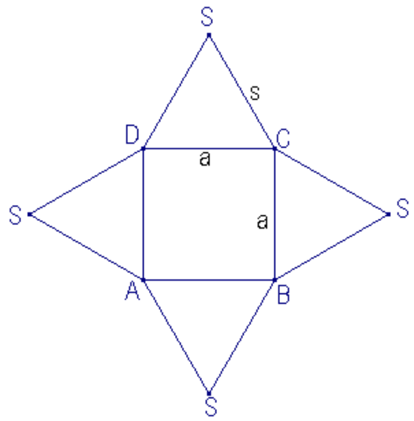
1. **Konstruiere aus den dargestellten Pyramiden-Netzen das Schrägbild der entsprechenden Pyramide (verwende die entsprechenden Streckenlängen aus der Skizze.**
   a) regelmässige quadratische Pyramide (a ≠ s)



b) dreiseitige Pyramide (Grundfläche ABC). Achtung, die Pyramide ist NICHT gerade, *(Die Spitze steht also nicht über dem Schwerpunkt der Grundfläche)*

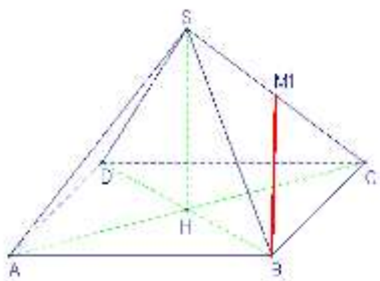


c) regelmässige, quadratische Pyramide (a = s)

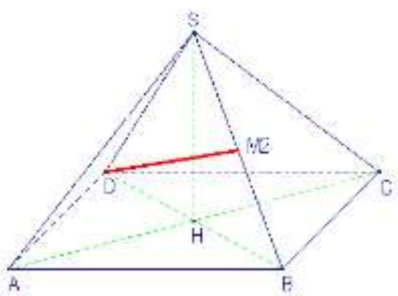


2. Konstruiere die eingezeichnete dick markierte Strecke in wahrer Grösse (Tipp: Suche konstruierbare Dreiecke oder Ebenen, in die die gesuchte Strecke eingebettet werden kann.)

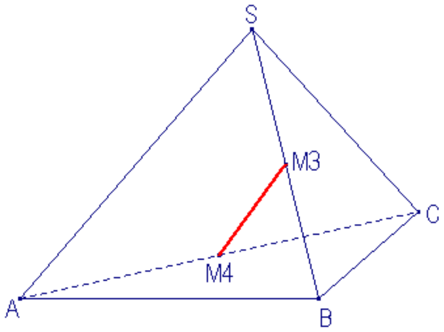
a) regelmässige quadratische Pyramide (AB = BC = 4cm, Höhe h = HS = 35mm)



b) regelmässige quadratische Pyramide (AB = BC = 3.5 cm, Höhe h = 25mm)



c) dreiseitige, gerade Pyramide (AB = 3 cm, BC = 2.5cm, AC = 4cm. AS = BS = CS = 3.5cm)

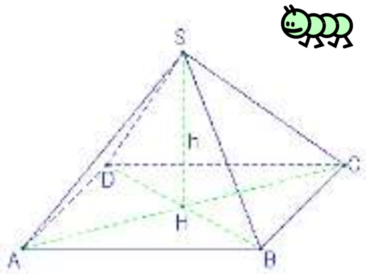


3. Eine quadratische gerade Pyramide hat eine Grundfläche von 11.56cm². Ihre Höhe beträgt 4cm. Der Punkt Q liegt auf dem Mittelpunkt von AS.

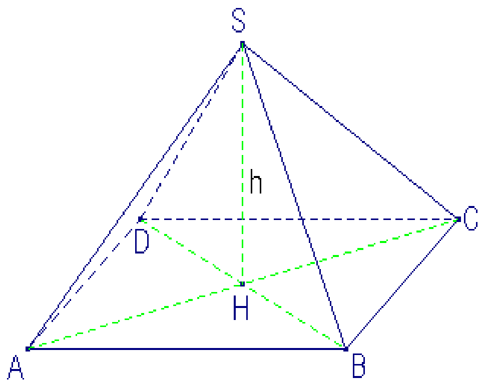
a. Zeichne das Raumbild dieser Pyramide
b. Zeichne die Schnittfläche, welche durch Q und C und S geht (und die senkrecht auf der Grundfläche steht) farbig im Raumbild ein.
c. Konstruiere die Schnittfläche in wahrer Form und Grösse
d. Konstruiere die Strecke QC in wahrer Grösse.

4. Berechne die fehlenden Grössen in einer geraden Pyramide (Die Grundfläche ist rechteckig oder quadratisch)

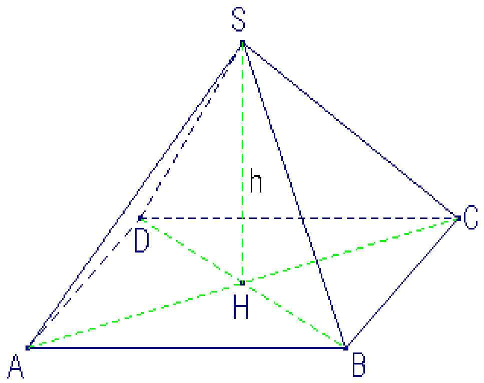
	AB	BC	h	V
a)	3.5 cm	3.2 cm	6cm	
b)	34 cm	12 cm		3468 cm^3
c)	25 dm		9 dm	1606.5 dm^3
d)		*(= AB)*	4.3 m	1046.448 m^3
e)	3d	4e	9f	
f)		24a	6a	1152a^3



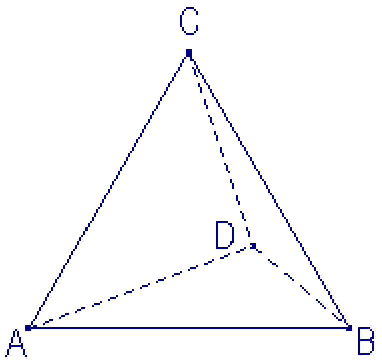
5. Gegeben ist eine quadratische, gerade Pyramide mit AB = BC = 4cm und h = 5cm. Berechne Volumen und Oberfläche dieser Pyramide.



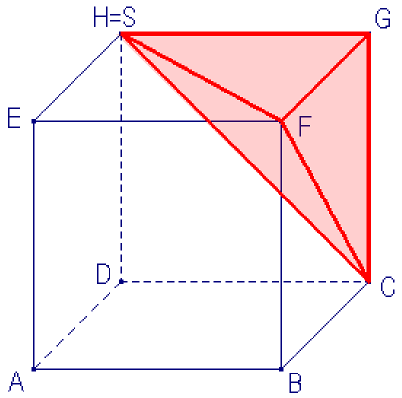
6. Gegeben ist eine quadratische, gerade Pyramide mit einer Grundfläche von 46.24cm² und einer Oberfläche 122.4cm². Berechne die Höhe und das Volumen dieser Pyramide.



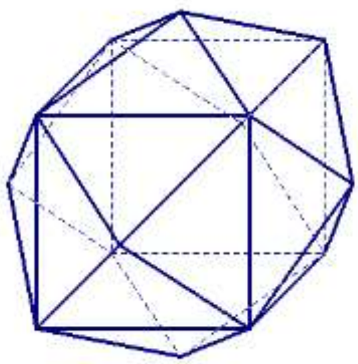
7. **Berechne den Oberflächeninhalt eines Tetraeders mit Kantenlänge 10cm.**



8. **Einem Würfel mit Kantenlänge a = 10cm ist eine Pyramide wie abgebildet eingeschrieben. Berechne Volumen und Oberfläche dieser Pyramide.**



9. **Einem Würfel mit Kantenlänge a werden auf allen Seitenflächen gleich grosse quadratische gerade Pyramiden aufgesetzt. Dadurch vergrössert sich das Volumen des Würfels um drei Viertel des ursprünglichen Volumens. Berechne die Höhe der aufgesetzten Pyramiden (Arbeite mit einer Gleichung).**



2. Der gerade Kreiskegel

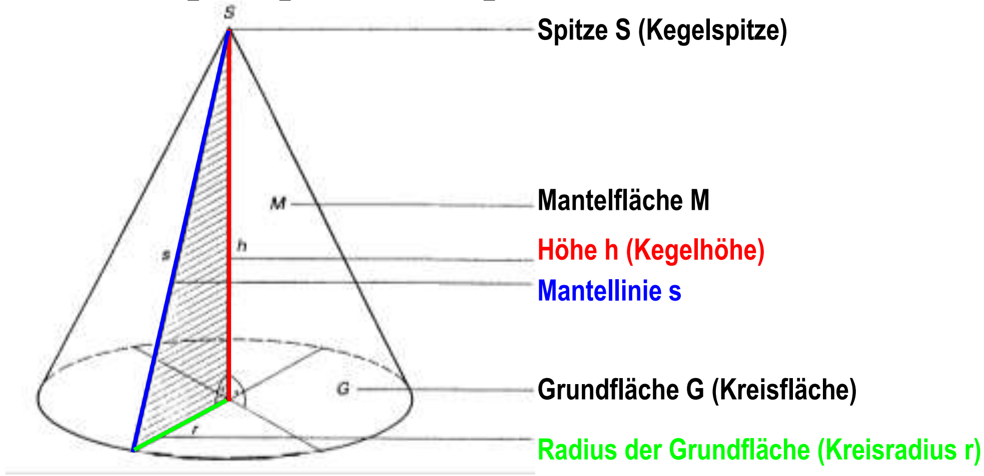
2.1 Definition

Noch näher als die Pyramide liegt uns der gerade Kreiskegel. Jeder Fussballer, Unihockeyaner oder Handballer hat in seiner Karriere schon einmal mit schweisstreibende Übungen rund um „Molankegel“ absolviert, im Strassenverkehr tauchen sie überall dort auf, wo Baustellen, Umleitungen oder Absperrungen zu finden sind. Und schliesslich ist auch die Frage nach dem Volumen eines geraden Kreiskegels sehr wichtig, nämlich dann, wenn es darum geht, an einem heissen Sommertag ein Softeis in der „Tüte“ (Cornet) zu kaufen. Der gerade Kreiskegel hat eine gewisse Verwandtschaft zur geraden Pyramide, mit der ausnahme allerdings, dass die Grundfläche beim Kreiskegel kreisförmig, bei der Pyramide ein n-Eck ist.

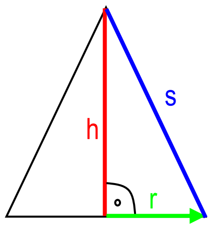
Als Definition gilt:

Als gerade Kreiskegel kommen nur Körper in Frage, deren Grundfläche ein Kreis sind. Die Kegelspitze steht dabei immer senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche (Kreismittelpunkt).

2.2 Bezeichnungen im geraden Kreiskegel:



Der Achsenabschnitt des Kreiskegels:
Als Achsenabschnitt bezeichnet man einen Querschnitt durch den Kegel. Mit anderen Worten, der Achsenabschnitt ist das Dreieck, das um seine Symmetrieachse gedreht wird und so den Kreiskegel erzeugt:



Dieses Dreieck wird um die Symmetrieachse h rotiert. So erzeugt es einen geraden Kreiskegel, wobei die Spitze durch die Spitze des Dreiecks gebildet wird. Die anderen Grössen sind entsprechend der Kreiskegelskizze angeschrieben.

2.3 Eigenschaften des geraden Kreiskegels

Wie oben angetönt hat der gerade Kreiskegel einige speziellen Eigenschaften:

- Die Grundfläche ist ein Kreis
- Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche

2.4 Das Volumen des geraden Kreiskegels

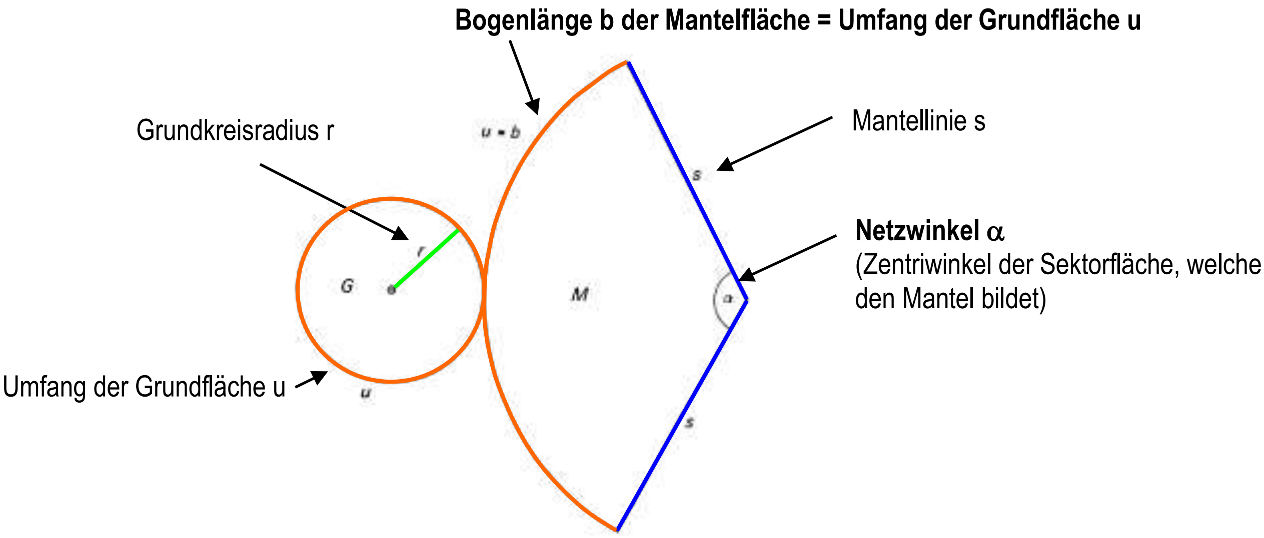
Auf Grund der Verwandtschaft des Kreiskegels mit der geraden Pyramide verzichten wir auf einen erneuten Beweis der Volumenberechnung und stellen fest, dass sich das Volumen genau gleich berechnen lässt, wie bei der geraden Pyramide.

Also gilt: $\pi r^2 = G$ *(Kreisfläche)*

$$V_{Kreiskegel} = \frac{G \bullet h}{3} = \frac{\pi r^2 \bullet h}{3}$$

2.5 Das Netz des geraden Kreiskegels

Bevor wir die Oberfläche bestimmen, zeichnen wir einmal ein Netz einer quadratischen Pyramide.



Wir können also feststellen, dass die Berechnung der Oberfläche und auch des Volumens (siehe oben) mit der Kreisberechnung zusammenhängt. Und so müssen wir uns wieder an die entsprechenden Formeln erinnern.

$u = 2\,\pi\, r$ Umfang der Grundfläche

$b = \frac{2\pi s \bullet \alpha}{360}$ Bogenlänge der Mantelfläche (Bogenlänge im Kreissektor mit Radius s!). b = u

Weil der Umfang der Grundfläche und die Bogenlänge der Mantelfläche gleich sein müssen gilt:

$$\mathbf{u = b = \frac{2\pi s \bullet \alpha}{360°} = 2\,\pi\, r}$$

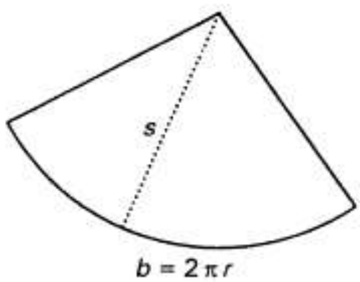
Der Netzwinkel kann damit auch berechnet werden: $\alpha = \frac{\mathbf{360° \bullet r}}{\mathbf{s}}$

2.6 Die Mantelfläche des geraden Kreiskegels:

Die Mantelfläche ist nichts anderes als ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel α (Netzwinkel) und dem Radius s (Mantellinie). Also können wir die Mantelfläche wie folgt berechnen:

α aus Berechnung oben!

$$M = \pi s^2 \bullet \frac{\alpha}{360°} = \pi s^2 \bullet \frac{\frac{360° \bullet r}{s}}{360°} = \pi s^2 \bullet \frac{360° \bullet r}{s} \bullet \frac{1}{360°} = \frac{\pi s^2 \bullet 360° \bullet r}{s \bullet 360°}$$



und durch kürzen: $\boxed{\mathbf{M = \pi r s,}}$

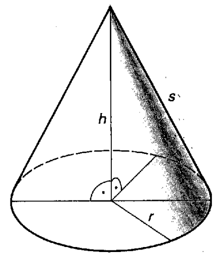
2.7 Die Oberfläche des geraden Kreiskegels

Der Oberflächeninhalt ist wie bei der Pyramide zu berechnen.

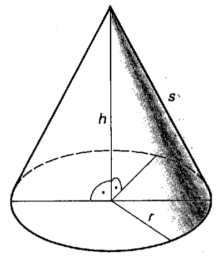
Oberfläche = Grundfläche + Mantel oder S = G + M ➔ $\mathbf{S} = \underbrace{\pi r^2}_{G} + \underbrace{\pi r s}_{M} = \mathbf{\pi\, r\, (r+s)}$

Aufgaben “Gerader Kreiskegel“:

1. **Berechne im geraden Kreiskegel**
   a. **das Volumen, wenn der Radius der Grundfläche 32cm und die Höhe 12cm misst.**
   b. **die Höhe, wenn der Grundkreisumfang 43cm misst und das Volumen 565 cm^3 gross ist.**
   c. **den Radius der Grundfläche, wenn die Höhe 340cm misst und das Volumen 348’646 cm^3 gross ist.**

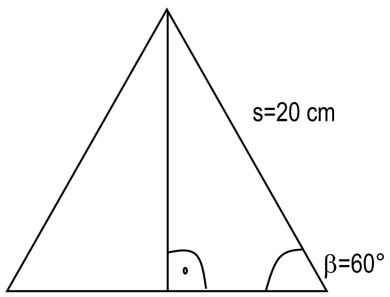


2. **Berechne im geraden Kreiskegel**
   a. **den Inhalt des Kegelmantels, wenn du weisst, dass r = 15cm und h = 21cm.**
   b. **den Inhalt der Kegeloberfläche (S) wenn s = 51cm und h = 41cm**
   c. **den Netzwinkel α, wenn s = 5r**



3. **Ein Kreiskegel hat den Grundflächendurchmesser 4r und die Höhe 5r. Wie hoch ist eine gerade quadratische Pyramide, deren Volumen gleich dem Kegelvolumen ist und deren Grundkante 4r misst?**

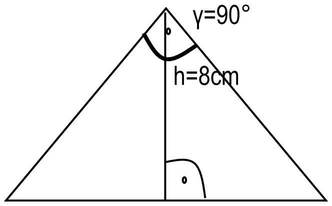
4. **Gegeben ist der Achsenabschnitt eines geraden Kreiskegels gemäss Skizze** *(die Skizze ist nicht massstäblich).*
   a. Berechne den Netzwinkel α des Kreiskegels
   b. Berechne die Oberfläche S des Kreiskegels



5. Gegeben ist der Achsenabschnitt eines geraden Kreiskegels gemäss Skizze *(die Skizze ist nicht massstäblich).*

a. Berechne das Volumen V des Kreiskegels

b. Berechne die Mantelfläche M des Kreiskegels

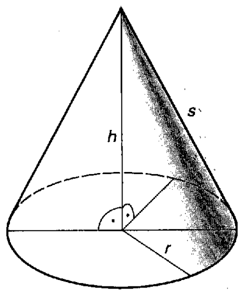


6. Von einem geraden Kreiskegel kennst du das Volumen ($V = 6971.25\ cm^3$) und die Grösse der Grundfläche ($G=267.83cm^2$).

a. Berechne die Länge der Mantellinie (s)

b. Berechne den Inhalt der Mantelfläche (M)

c. Berechne den Netzwinkel α



7. Ein gerader Kreiskegel wird parallel zur Grundfläche zerschnitten.

a. Berechne das Volumen des Restkörpers

b. Konstruiere den Mantel des Restkörpers in wahrer Form und Grösse (Netzwinkel berechnen!)